Universität Freiburg

PD Dr. D. Lebiedz
Dipl.-Math. J. Unger

Profilmodul Mathematik (für Systembiologie)

Sommersemester 2011

Übungsblatt 4

Webseite zur Vorlesung:
`http://www.lebiedz.de` → `Lehre`

Aufgabe 1. Kurven im $\mathbb{R}^n$

Betrachten Sie die Kurve, die durch die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$,

$$f(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} t - \sin t \\ 1 - \cos t \end{bmatrix}$$

gegeben ist. Sie beschreibt die Bahn eines Punktes auf der Peripherie eines Kreises vom Radius 1, der auf der $x-$Achse der $(x, y)-$Ebene abrollt.

1. Fertigen Sie eine Skizze der Kurve für $t \in [0, 2\pi]$ an und veranschaulichen Sie den rollenden Kreis.
2. Berechnen Sie den Tangentialvektor $f'(t)$ für beliebiges t. Zeichnen Sie den Tangentialvektor für $t = \pi/2$ in die Skizze aus Teil 1.
3. Berechnen Sie die Länge der Kurve von $t = 0$ bis $t = 2\pi$.
   Hinweis: Benutzen Sie die Formeln: $\cos^2 \frac{t}{2} + \sin^2 \frac{t}{2} = 1$ und $\cos t = \cos^2 \frac{t}{2} - \sin^2 \frac{t}{2}$.

Aufgabe 2. Niveaulinien und Gradient

Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$z = f(x, y) := -2x^2 - y^2$$

1. Verschaffen Sie sich einen Überblick über die Funktion (Skizze in $\mathbb{R}^3$) und skizzieren Sie jeweils einige Niveaulinien (mindestens 3) von f in der $xy-$, $xz-$ und $yz-$ Ebene.
2. Berechnen Sie die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ und $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$. Zusammengefasst bilden sie den Gradientenvektor
   $$\nabla f(x, y) := \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \end{bmatrix}.$$
   Was bedeutet der Gradient anschaulich? Wie ist der Zusammenhang mit der Ableitung in $\mathbb{R}$? Ist die Funktion f total differenzierbar?
3. Zeigen Sie, dass der Gradient lokal in die Richtung des steilsten Anstiegs zeigt.
   Hinweis: Betrachten Sie die Richtungsableitung in Richtung des Vektors v mit $||v|| = 1$ und den Winkel, den der Gradient mit dem Vektor v einschliesst.

4. Begründen Sie, dass der Gradient senkrecht auf den Niveaulinien steht und zeichnen Sie den Gradienten an einem geeignete Punkt in die Skizze aus (a) an eine geeignete Niveaulinie in der $xy-$Ebene ein.
   Hinweis: Argumentieren Sie über die Richtungsableitung entlang der Niveaulinien.

Aufgabe 3. Partielle Ableitungen und totales Differential

1. Berechnen Sie die ersten Ableitungen folgender Funktionen:
   (a) $f(x, y) = 4(x + y)^2 + (x - y)^2$
   (b) $f(x, y) = xy^2(\sin x + \sin y)$
   (c) $f(x, y) = \ln(x + y^2) - e^{2xy} + 3x$
   (d) $f(x, y, z) = xyz + \ln(x^2 + y^3)$
2. Differenzieren Sie die Zustandsgleichung des idealen Gases (für 1 Mol) $p(V, T) = \frac{RT}{V}$ partiell nach V, beziehungsweise T.
3. Berechnen Sie das totale Differential eines idealen Gases das (für 1 Mol) der Zustandsgleichung $p(V, T) = \frac{RT}{V}$ genügt und erlätern Sie allgemein, was durch ein totales Differential beschrieben wird.
4. Berechnen Sie die zweiten partiellen Ableitungen der Funktion 3.1.(a)