Der Fall ohne Beschränkungen:

Voraussetzung: f ist 2-mal stetig differenzierbar

$\min f(x)$, $\quad f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$\to$ (1) $\nabla f(x^*) \overset{!}{=} 0$ (notwendige)

(2) $\nabla^2 f(x^*)$ „> 0" (pos. definit)

(1) u. (2) hinreichend

Lösung: Suche Nullstelle von $\nabla f(x) = 0$
und überprüfe Bedingung (2)

aber: Newton konvergiert nur lokal
$\to$ i. A. Globalisierungsstrategien

Der gleichungsbeschränkte Fall:
Ziel ist Herleitung von notwendigen Bed. für Optimalität
am Beispiel: $\min f(x) = x_1 + x_2$
unter $x_1^2 + x_2^2 - 2 = 0$

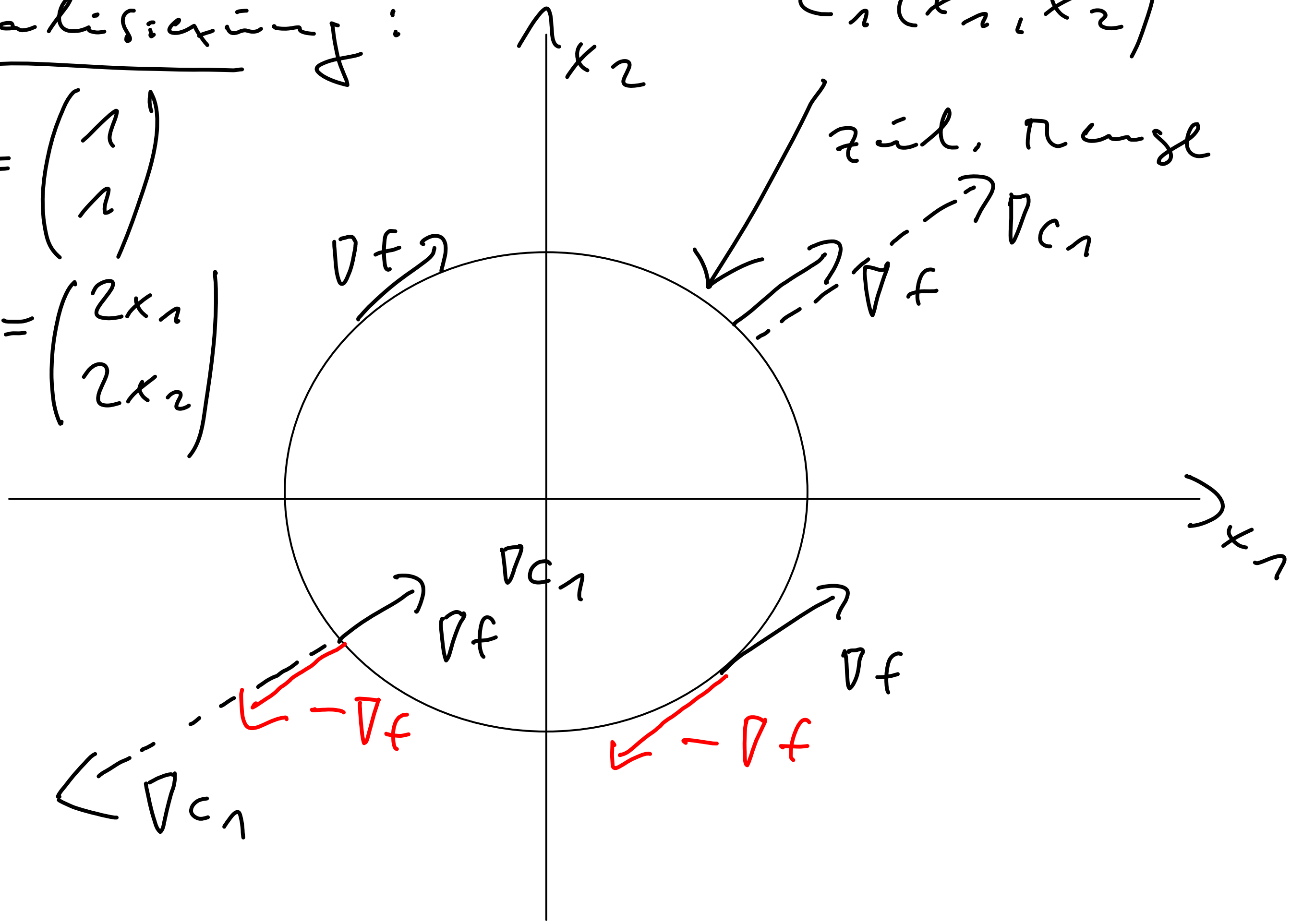
Definiere zulässige Menge

$$\{ x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \underbrace{x_1^2 + x_2^2 - 2}_{c_1(x_1, x_2)} = 0 \}$$

Visualisierung:

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\nabla c_1(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{pmatrix}$$



Man sieht hier: immer Abstiegsrichtungen möglich, außer wenn

$$\nabla f(x^*) = \lambda_1^* \cdot \nabla c_1(x^*), \quad (3)$$

Bedingung (3) bedeutet: $\nabla f(x^*)$ und $\nabla c_1(x^*)$ sind parallel.

<u>allgemein</u>:

Definiere sog. Lagrange-Funktion

$$L(x, \lambda_1) := f(x) - \lambda_1 c_1(x)$$

dann notwendige Bed. für x^* optimal:

$$0 = \nabla_x L(x^*, \lambda_1) = \nabla f(x^*) - \lambda_1 \nabla c_1(x^*)$$

Ungleichungsbeschränkung:

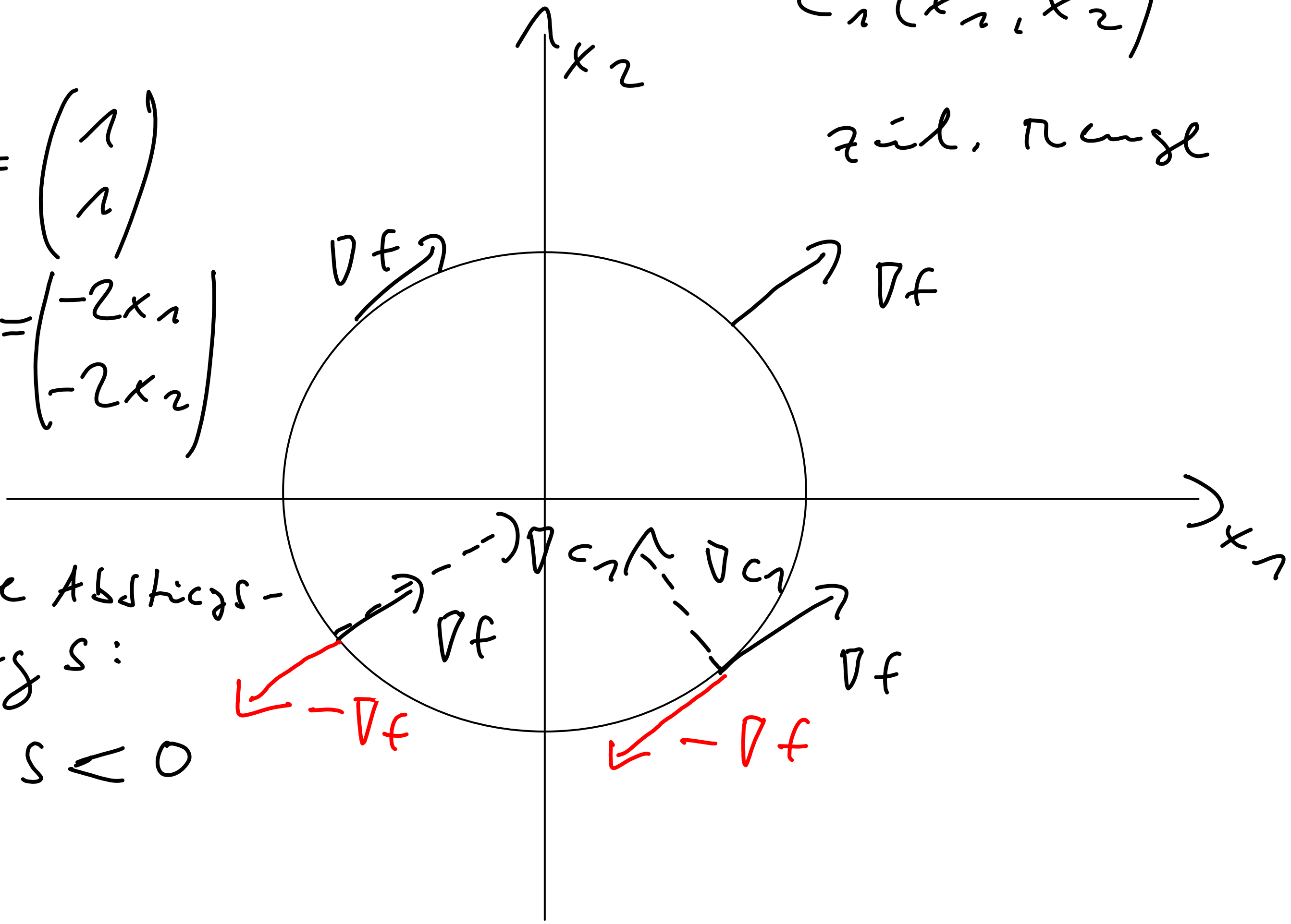
$$\min \quad f(x) = x_1 + x_2$$

$$\text{unter} \quad 2 - x_1^2 - x_2^2 \geq 0 \qquad c_1(x_1, x_2)$$

zul. Menge

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\nabla c_1 = \begin{pmatrix} -2x_1 \\ -2x_2 \end{pmatrix}$$



zulässige Abstiegsrichtung s:

$$\nabla f(x)^T \cdot s < 0$$

Zulässigkeit des Schrittes s in linearer Näherung erfordert:

$$0 \leq c_1(x+s) \approx c_1(x) + \nabla c_1(x)^T s \quad (*)$$

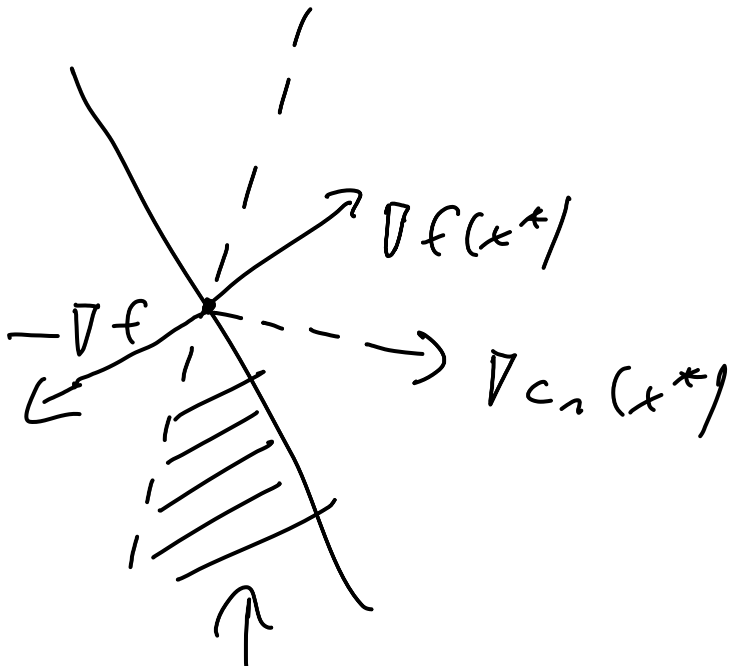
<u>Fallunterscheidung</u>: x^* optimale Lösung

1. x^* im „Inneren" der zulässigen Menge $\rightarrow$ es lässt sich immer Abstiegsrichtung finden mit $\nabla f(x^*)^T s < 0$ außer wenn $\nabla f(x^*) = 0$
   $\Rightarrow \nabla f(x^*) = 0$ notwendige Bed. für Minimum

2. x^* am Rand der zulässigen Menge, dann $c_1(x^*) = 0$ und $(*)$ wird zu $\nabla c_1(x^*)^T \cdot s \geq 0$ (zusammen mit $\nabla f(x^*)^T \cdot s < 0$ für Abstiegsrichtung

im Fall 2. müssen ∇c_1 und ∇f parallel sein und in die gleiche Richtung zeigen, damit man keine Abstiegsrichtung findet: d.h.

$$\nabla f(x^*) = \lambda_1 \nabla c_1(x^*), \quad \lambda_1 \geq 0$$



zulässigen Abstiegsrichtungen!

allgemeiner Fall: (1. und 2.)

Def. Lagrange-Funktion

$$L(x, \lambda_1) := f(x) - \lambda_1 c_1(x)$$

notwendige Bed. für x^* optimale Lösung des ungleichungsbeschränkten Optimierungsproblems:

$$0 = \nabla_x L(x^*, \lambda_1^*) = \nabla f(x^*) - \lambda_1^* \nabla c_1(x^*)$$

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1^* &\geq 0 \\ \lambda_1^* \cdot c_1(x^*) &= 0 \end{aligned}\right\} \text{Komplementarbedingung}$$

Die Komplementaritätsbedingung stellt sicher, dass entweder $\lambda_1^* = 0$ (wenn Ungleichung nicht aktiv) oder $\lambda_1^* \geq 0$ (wenn Ungleichung aktiv).

„Aktiv" heißt hier, dass die Gleichheit in $c_1(x^*) \geq 0$ gilt.