Universität Freiburg

PD Dr. Dirk Lebiedz
Prof. Dr. D. Kröner

Einführung in die Theorie und Numerik von Optimierungsproblemen

Sommersemester 2010

Übungsblatt 4 - Abgabe Theorieaufg.: 19.05.2010, Programmieraufg.: 31.05.2010

Webseite zur Vorlesung: `http://www.lebiedz.de` → `Lehre`

Aufgabe 11. Tangentialkegel

Zeigen Sie:

1. Für jede Menge $S \subset \mathbb{R}^n,\ \bar{x} \in S$ ist der Tangentialkegel $T(S, \bar{x})$ ein abgeschlossener Kegel.
2. Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ konvex und $\bar{x} \in K$. Der Tangentialkegel $T(K, \bar{x})$ ist der Abschluss der konischen Hülle von K in $\bar{x}$. Insbesondere gilt für $K = \mathbb{R}^k_-$: $T(K, \bar{x}) = \{y \in \mathbb{R}^n : y_i \leq 0$ falls $\bar{x}_i = 0, i = 1, ..., n\}$

(2+2 Punkte)

Aufgabe 12. Variationsungleichung

Beweisen Sie die Variationsungleichung aus der Vorlesung.
Hinweis: Benutzen Sie die Darstellung $x_i = \bar{x} + t_i v + o(t_i),\ x_i \in S$ für einen Vektor v aus dem Tangentialkegel.

(2 Punkte)

Aufgabe 13. Tangentialkegel

Zeigen Sie, dass gilt:

1. Sei $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g(x) \in K, K \text{ konvex}\},\ g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Ist die konische Hülle $K(g(\bar{x}))$ abgeschlossen, dann gilt $T(S, \bar{x}) \subset L(S, \bar{x})$.
2. Ein Punkt $\bar{x} \in S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g(x) = 0\},\ g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ist regulär (d.h. $g_i'(\bar{x}),\ i = 1, ..., m$ sind linear unabhängig) $\Rightarrow$ Die Matrix $g'(\bar{x})g'(\bar{x})^T$ ist regulär.
3. Ein Punkt $\bar{x} \in S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g(x) \in K, K \text{ konvex}\},\ g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ist nicht regulär (nach Robinson, Def. 3.13 der Vorlesung) $\Longleftrightarrow$ Es gibt ein $\lambda \in \mathbb{R}^n, \lambda \neq 0$ mit $\lambda g'(\bar{x}) = 0$ und $\lambda(-y) \geq 0,\ \forall\, y \in K(g(\bar{x}))$.

(2+2+2 Punkte)

Aufgabe 14. Programmieraufgabe AMPL: Lineare Optimierung

Implementieren Sie das folgende LP in AMPL und lösen Sie es mit einem geeigneten Solver über das Web-Interface (siehe Ü-Blatt 1).

Eine Öl-Raffinerie möchte aus Rohöl verschiedene Produkte herstellen und dabei die Produktionskosten (in US$)

$$z(x) = 16.5x_1 + 5.25x_3 + 5.25x_4 + 3x_{13}\ , \quad x \in \mathbb{R}^{16},$$

minimieren unter den folgenden Restriktionen ($x \geq 0$):

(1) Höchstgrenze für Rohöl:

$$x_1 \leq 750\,000.$$

(2) Massen-Bilanz der Komponenten:

$$\begin{array}{rcrcrcrcl}
0.178x_1 & - & x_2 & - & x_3 & & & = & 0\,, \\
0.048x_1 & - & x_4 & - & x_5 & - & x_6 & = & 0\,, \\
0.069x_1 & - & x_7 & - & x_8 & - & x_9 & = & 0\,, \\
0.184x_1 & - & x_{10} & - & x_{11} & - & x_{12} & = & 0\,, \\
0.241x_1 & - & x_{13} & - & x_{14} & & & = & 0\,, \\
0.266x_1 & - & x_{15} & - & x_{16} & & & = & 0\,.
\end{array}$$

(3) Produktions-Anforderungen:

$$\begin{array}{rcr}
x_2 + 0.865x_3 + 0.85x_4 + 0.373x_{13} & = & 124\,400\,, \\
x_5 + x_7 + x_{10} & = & 18\,800\,, \\
x_8 + x_{11} + x_{16} & = & 90\,700\,, \\
x_6 + x_9 + x_{12} + 0.331x_{13} + x_{14} + x_{15} & = & 291\,600\,.
\end{array}$$

(4) Qualitäts-Anforderungen:

$$\begin{array}{rcl}
15x_2 - 6.75x_3 - 8.5x_4 - 5.97x_{13} & \leq & 0\,, \\
10x_8 + 10x_{11} - 90x_{16} & \leq & 0\,, \\
-25.7x_6 - 25.7x_9 - 16.1x_{12} - 4.4x_{13} - 5.1x_{14} & \leq & 0\,.
\end{array}$$

(3 Punkte)

Aufgabe 15. Programmieraufgabe Einführung MATLAB

1. Die Zahl e kann durch folgenden Grenzwert approximiert werden

$$\lim_{x\to\infty} f(x), \quad f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x.$$

   Schreiben Sie ein Programm, daß die Zahl e bis zu einer vorgegebenen Genauigkeit über diesen Grenzwert berechnet. Schreiben Sie dazu zuerst eine Funktion, die $f(x)$ für beliebige x auswertet. Plotten Sie den Wert Ihrer Approximation gegen x um die Genauigkeit der Approximation zu visualisieren.

2. Schreiben Sie ein Programm, das die Zahl π mittels der Approximation des Einheitskreises durch reguläre Polygone mit N Ecken berechnet. Das Verfahren, das von Archimedes entwickelt wurde, funktioniert so: Betrachten Sie den Einheitskreis. Archimedes entwickelte eine Formel, mit der der Umfang eines regulären Polygons mit $2N$ Ecken aus dem Umfang eines Polygons mit N Ecken berechnet werden kann. Die Seitenlänge des Polygons mit $2N$ Ecken L ist durch

$$L = \sqrt{2 - \sqrt{4 - A^2}}$$

   gegeben, wobei A die Seitenlänge des Polygons mit N Ecken ist (d.h. der Umfang des Polygons mit N Ecken ist dann durch $N \cdot A$ gegeben). Schreiben Sie nun ein Programm, das die Zahl π mittels dieses Verfahrens berechnet. Beginnen Sie mit einem Viereck und verfeinern Sie dieses Viereck immer mehr, um eine gute Approximation der Zahl π zu erhalten.

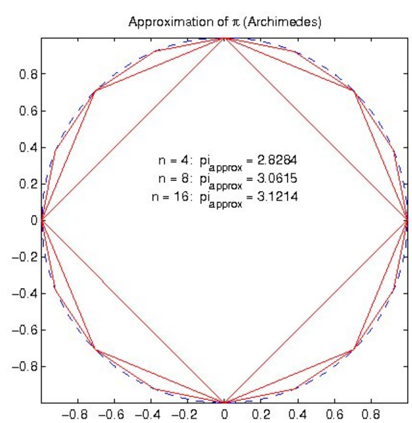


Abbildung 1: Bestimmung der Zahl π mittels regulären Polygonen.

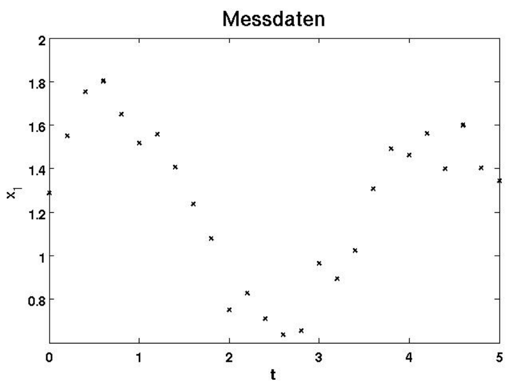
(2+2 Punkte)

Aufgabe 16. Programmieraufgabe

Gegeben sei ein Oszillatormodell mit drei unbekannten Parametern (p_1, p_2, p_3)

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -p_1 x_2 - p_2(x_1 - p_3) \end{aligned}$$

mit unbekanntem Anfangswert $x(0)$ und der folgende Zeitverlauf der Zustandsgrösse x_1 in Form von 26 Messdatenpaaren $(t_i, (x_1)_i)$ (, die Sie auf der Homepage herunterladen können).



t	x_1	t	x_1
0	1.2870	2.6	0.6379
0.2000	1.5494	2.8	0.6552
0.4000	1.7540	3.0	0.9656
0.6000	1.8023	3.2	0.8928
0.8000	1.6507	3.4	1.0246
1.0000	1.5181	3.6	1.3078
1.2000	1.5586	3.8	1.4906
1.4000	1.4072	4.0	1.4610
1.6000	1.2370	4.2	1.5615
1.8000	1.0785	4.4	1.3986
2.0000	0.7512	4.6	1.5997
2.2000	0.8262	4.8	1.4021
2.4000	0.7111	5.0	1.3451

Lösen Sie das Parameterschätzproblem

$$\begin{aligned} \min_{x_0, p} \; & \|x - \bar{x}\|_2^2 \\ \text{unter } & \dot{x} = f(x, p) \end{aligned}$$

um die Startwerte und die Parameter zu bestimmen. Verwenden Sie als Startwerte für die Optimierung $x_1(0) = 0.5$, $x_2(0) = 1$ und $p_1 = 0.1$, $p_2 = 2$ und $p_3 = 0.5$ und die `MATLAB`-Funktionen `fminsearch` und den Integrator `ode15s`. Stellen Sie Ihren Fit und die Messdaten in einer Abbildung dar.

(4 Punkte)